

УДК 37.091.3:[5+004.42]

DOI:<https://doi.org/10.54662/veresen.4.2025.04>**Рогожинська Еліна,**

ORCID iD 0000-0002-6289-7162

методист кафедри теорії й методики

природничо-математичної освіти

та інформаційних технологій

Миколаївський обласний інститут

післядипломної педагогічної освіти

вул. Адміральська, 4-а, 54001, м. Миколаїв, Україна

elina.rohozhynska@moippro.mk.ua

Римар Ростислав,

ORCID iD 0009-0008-5689-7415

викладач інформатики Відокремленого структурного

підрозділу «Технологічно-економічний фаховий коледж

Миколаївського національного аграрного університету»

вулиця Георгія Гонгадзе, 9, 54000, м. Миколаїв, Україна

rymar@mnaui.edu.ua

ВІЗУАЛЬНІ ТА КОМП'ЮТЕРНІ МОДЕЛІ В ІНТЕГРОВАНОМУ НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

У науково-методичній статті обґрунтовано педагогічну цінність візуального та комп'ютерного моделювання в навчанні математики 7–11 класів і запропоновано способи інтеграції використання GeoGebra, Desmos та Python (бібліотеки turtle, matplotlib). Теоретико-методичний аналіз і авторські узагальнення показують, що динамічні геометричні системи підсилюють просторову візуалізацію, забезпечують роботу з інваріантами та параметрами, а програмування на Python проєктує спостереження у площину обчислювальної перевірки, експериментів і узагальнення результатів. Запропоновано дидактичну логіку «візуалізація → аналіз → програмна верифікація → узагальнення», яку доречно реалізовувати через групову діяльність і ролі учасників. Представлено приклади інтеграційних можливостей за розділами курсу математики через фрагменти уроків, де учні самостійно виявляють закономірності та формулюють висновки. Практичну значущість посилено можливістю упроваджувати завдяки наданим від авторів чітким крокам, що поєднують динамічну геометрію з обчислювальним мисленням.

Ключові слова: динамічні геометричні системи; інтеграція; моделювання; обчислювальне мислення; Desmos; GeoGebra; Python.

© Рогожинська Е. К., Римар Р. В., 2025

Постановка проблеми. У сучасній математичній освіті України та світу зростає значення візуалізації, комп'ютерного моделювання та діяльнісних підходів у навчанні. Учні 7–11 класів опановують абстрактні поняття, аналітичні й просторові моделі, які складно сприймати без опори

на зорові образи та динамічні конструкції. Застосування цифрових інструментів та програмних середовищ, зокрема GeoGebra і Python, сприяє розвитку просторового мислення, самостійному дослідженню закономірностей, баченню зв'язків між аналітичним і графічним поданням об'єктів,

а також підвищенню навчальної мотивації через інтерактивність і практичну значущість знань. Використання таких засобів відкриває можливість для реалізації STEM-підходів, формування обчислювального мислення (computational thinking) і розвитку навичок моделювання, що є важливими складниками сучасної математичної грамотності, визначеної в міжнародних дослідженнях PISA. Попри це сучасні цифрові засоби, що передбачають активну діяльність учнів на уроках математики, нині здебільшого застосовують лише для демонстрації моделей. Учні рідко залучають до самостійного створення цих моделей, до експериментів із параметрами, перевірки гіпотез чи побудови власних візуалізацій. Брак системного підходу до інтеграції динамічної геометрії й програмування на уроках математики знижує потенціал цих інструментів для розвитку мислення та творчості учнів.

Проблема полягає в недостатньому впровадженні комп'ютерного моделювання в навчання математики, що обмежує можливості формування в учнів глибокого розуміння геометричних та функціональних залежностей, алгоритмічного мислення і мотивації до навчання. Актуальним постає завдання: переосмислити роль візуального та комп'ютерного моделювання у шкільному курсі математики як засобу не лише пояснення, а й самостійних учнівських відкриттів знань та формування їхньої дослідницької культури. Його виконання вбачаємо в інтеграції цифрових засобів у процес навчання предмета.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Актуальні огляди закордонних джерел, зокрема А. Хі, В. Йан, А. Кілічман, підтверджують, що послуговування динамічними геометричними системами (DGS) зумовлює відчутний, зазвичай позитивний ефект на навчальні результати з геометрії та пов'язані теми. Ефект зростає, коли уроки спроектовано за кооперативною моделлю, а не як «демонстрація вчителя», також відзначено покращення просторової візуалізації, зростання наполегливості учнів

у розв'язуванні задач (He A., Yuan W. & Kiliçman A., 2024).

Сучасні дослідники наголошують на інтеграції цифрових середовищ у курс математики через задачі, де Python (бібліотеки turtle/matplotlib) залучають для параметричних експериментів, перевірки гіпотез, автоматизації побудов та збирання даних. На погляд В. Найта, С. Лоуренса, Д. Чакраворті, між Python і GeoGebra виникають й безпосередні зв'язки, що сприяють інтеграції динамічних геометричних систем і коду у межах одного навчального сценарію (Nite W. A., Lawrence S. B., R., Chakravorty D., 2025). Дослідження показало, що систематичне використання GeoGebra зумовлює формування ключових компетентностей, розвиток критичного мислення та пізнавальної активності учнів. Здобувачі освіти, які працювали з інтерактивними моделями, демонстрували глибше розуміння суті математичних понять, уміння пояснювати взаємозв'язки між аналітичними та графічними представленнями функцій, швидше виконували дослідницькі завдання.

У вітчизняній системі математичної освіти програмне середовище GeoGebra стало одним із найпоширеніших інструментів інтеграції інформаційно-комунікаційних технологій у навчальний процес. Різні науковці досліджують його потенціал у формуванні математичної, ІКТ-компетентностей та дослідницьких умінь. Процес підготовки майбутніх учителів математики у процесі вивчення математичних дисциплін із використанням пакету GeoGebra проаналізовано в розвідках Т. Поліщук, Г. Іщенко та Д. Возносименко (Поліщук Т., Іщенко Г., Возносименко Д., 2023). Автори наголосили, що програмне середовище сприяє розвитку навичок унаочнення математичних об'єктів, виконанню прикладних і дослідницьких завдань.

Можливості GeoGebra у 7 класі під час вивчення курсу геометрії дослідила Л. М. Шабанова та визначила, що сервіс є ефективним засобом візуалізації фігур, а також віртуальною дошкою, яка стимулює

пізнавальну активність учнів і дозволяє організовувати дистанційні уроки (Шабанова Л. М., 2022).

GeoGebra для дослідження геометричних перетворень, зокрема інверсії, застосувала Л. Тютюн. Послугування динамічними моделями сприяло поліпшенню розуміння учнів властивостей фігур і розвитку просторового мислення (Тютюн Л., 2020).

Переваги використання GeoGebra на уроках стереометрії розглянуто в дослідженні Д. Зуліної. Авторка доводить, що динамічні 3D-моделі допомагають розвивати просторову уяву, полегшують розуміння тривимірних фігур і сприяють підвищенню ефективності навчального процесу (Зуліна Д., 2020).

Методичні підходи до створення дослідницьких завдань, що інтегрують математику з іншими науками, окреслює В. В. Пікалова, розглядаючи GeoGebra як інструмент для впровадження STEM-досліджень у підготовку майбутніх учителів (Пікалова В. В., 2020). Міжпредметну інтеграцію предметів природничо-математичного циклу для моделювання фізичних процесів і побудови графіків залежностей описано в роботі Н. О. Єрмакової-Черченко (2022). Можливості GeoGebra в економічних моделях, зокрема в аналізі попиту, пропозиції, рівноваги та оптимізації розглянуто в розвідці Ю. І Овсієнко., А. В. Антонець та І. М. Канівець (Овсієнко Ю. І., Антонець А. В., Канівець І. М., 2025).

На проєктно-дослідницькій діяльності учнів у GeoGebra наголосили автори О. О. Гриб'юк і В. Л. Юнчик (Гриб'юк О. О., Юнчик В. Л., 2019). За висновками науковців, середовище допомагає здобувачам освіти не лише розв'язувати готові задачі, а й здійснювати власні дослідження, висувати гіпотези та аналізувати результати.

Інтеграції програмування та природничо-математичної освіти в школі в контексті STEM-освіти з прикладами впровадження присвячено роботу Г. С. Погром-

ської, Н. А. Махровської (Погромська Г. С., Махровська Н. А., 2025). Практику реалізації динамічних можливостей середовищ Desmos та GeoGebra розкривають компетентісно та діяльнісно орієнтовані варіативні модулі викладачів кафедри теорії й методики природничо-математичної освіти та ІТ Миколаївського ОППО Г. С. Погромської та Н. А. Махровської (Програма компетентісно та діяльнісно орієнтованого варіативного модуля (для очної та дистанційної форм навчання) «Цікава математика з Desmos» (Погромська Г. С., 2021).

Обчислювальне мислення як підхід до розв'язання задач, що охоплює інформатичні методи, спостерігаємо в роботах С. Пейперта (Пейперт С., 1989), Ж. Вінг (Wing J. M., 2008). У документах Міжнародного товариства технологій освіти (ISTE) та Асоціації викладачів комп'ютерних наук (CSTA) подано таке його визначення: «Обчислювальне мислення – це процес (пере)формулювання проблем так, що стає можливим розв'язати проблему за допомогою комп'ютерних технологій» (Fletcher G. H., Lu J. J., 2009). Складниками обчислювального мислення є декомпозиція, виявлення шаблонів, узагальнення й абстрагування та розроблення алгоритмів (Grover S., Pea R., 2013).

Інструменти динамічної геометрії (GeoGebra, Desmos Geometry) надають можливість учням безпосередньо бачити взаємозв'язки між елементами фігур і зміни параметрів у реальному часі. Поєднання таких засобів із програмуванням на Python сприяє розвитку обчислювального мислення, аналітичних навичок і розуміння глибинної структури математичних об'єктів. Зазначене вище зумовлює актуальність обраної теми.

Мета і завдання. Мета статті – показати цінність і педагогічний потенціал візуального та комп'ютерного моделювання в навчанні математики учнів 7–11 класів, обґрунтувати доцільність використання GeoGebra, Desmos і Python для розвитку просторового та обчислювального мислення, і продемонструвати фрагменти уроків,

у яких такі інструменти підсилюють дослідницький та мотиваційний складники навчання.

Завдання дослідження.

1. Визначити педагогічну цінність візуального й комп'ютерного моделювання у формуванні просторового та обчислювального мислення учнів.
2. Розглянути можливості інтеграції середовищ GeoGebra, Desmos Geometry і Python (turtle, matplotlib) у різні теми шкільного курсу математики.
3. Запропонувати приклади фрагментів уроків математики з використанням методу моделювання.

Виклад основного матеріалу. Візуальне та комп'ютерне моделювання є одним із потужних інструментів сучасного навчання математики. Воно поєднує два рівні пізнання – образний і аналітичний – надаючи можливість учням не лише спостерігати явище, а й активно ним керувати, змінювати параметри, перевіряти власні гіпотези. Такий підхід переводить навчання з площини «пояснення» у площину дослідження, коли кожен учень стає учасником відкриття закономірностей.

Діяльнісний підхід у поєднанні з комп'ютерним моделюванням передбачає: 1) визначення відкритої чи параметризованої задачі; 2) побудову моделі в динамічній геометричній системі; 3) варіювання параметрів і спостереження інваріантів; 4) програмну перевірку / розширення (Python); 5) рефлексію з чіткими критеріями доведення / аргументації. У такій рамці DGS – це лабораторія для гіпотез, а Python – лабораторія для експериментів (водночас із верифікацією формул та оцінюванням похибок).

Спираючись на досвід авторів, окреслимо педагогічну цінність візуального й комп'ютерного моделювання у формуванні просторового та обчислювального мислення учнів:

1. *Динамічні геометричні системи помітно підсилюють просторову візуалізацію*, коли учні не просто бачать статичну картинку (рисунок), а мають можливість

змінювати параметри (перетягуванням вершин, повзунків тощо) та робити висновки про властивості отриманих фігур.

Моделювання в GeoGebra або Desmos перетворює «статичний малюнок» на живу модель, яка реагує на зовнішні дії. Коли учень сам пересуває вершину трикутника, змінює параметр рівняння чи форму кривої, він буквально «бачить», як змінюється математичний об'єкт. Цей досвід формує інтуїцію: школяр набуває здатність відчувати геометрію, а не просто запам'ятовувати формули.

Ключова педагогічна цінність полягає в тому, що учень сам стає дослідником, здатним перевірити власне припущення без очікування «правильної відповіді» від учителя. Через такі дії розвивають не лише просторове уявлення, а й логіку, аналітичність, здатність бачити інваріанти – сталі властивості, які не змінюються під час трансформацій.

2. *Інтеграція програмування в математику сприяє підтримці узагальненню та перенесення дій у практичну площину.* Python у шкільному курсі математики може стати природним продовженням діяльності в GeoGebra: після побудови моделі можна програмно перевірити закономірності, провести серію експериментів або створити короткий скрипт для автоматизації обчислень.

Коли здобувач освіти спочатку візуально спостерігає закономірність у GeoGebra, а потім підтверджує її у Python, він проходить повний цикл дослідницької діяльності: *спостереження* → *гіпотеза* → *перевірка* → *висновок*. Така послідовність і є основою наукового мислення, якого потребує сучасна освіта. Програмування в такому форматі не конкурує з математикою, а підсилює її, даючи змогу швидко перевіряти десятки прикладів, змінювати параметри, бачити закономірності не лише орієнтовно, а й завдяки точним комп'ютерним обчисленням.

3. *Наявність емпіричного ефекту (досягнення, мотивація, залученість).* Візуальність та інтерактивність моделювання роблять навчання емоційно насиче-

ним. Учні отримують миттєвий зворотний зв'язок: вони бачать наслідок кожної дії, можуть експериментувати без страху помилки. Навчальна активність переходить із позиції «спостерігача» в позицію творця, і це суттєво підвищує внутрішню мотивацію. Особливо помітним є ефект в учнів із середнім рівнем успішності – вони починають відчувати контроль над процесом, розуміють логіку побудов і здобувають упевненість у власних силах.

4. *Позитивна роль цифрових інструментів.* GeoGebra забезпечує роботу з параметрами і вимірювання; учень не просто «бачить», а «випробовує» гіпотезу. Це прискорює перехід від малюнка до поняття (інваріанти, залежності тощо). Python (бібліотеки turtle / matplotlib) додає повторення і контроль: швидко згенерувати 100 прикладів, проаналізувати отримані результати, дослідити граничні випадки. Учні вчаться «не довіряти першому враженню», а підкріплювати висновок даними / перевітками – це ключова звичка обчислювального мислення – так належить формувати здатність узагальнювати.

Таким чином, стійкий позитивний

ефект для досягнення і мотивації можна фіксувати тоді, коли інструменти вмонтовані в діяльнісно спроектовані завдання, з чіткими ролями, параметрами та вимогою аргументації. Це і є головна педагогічна цінність моделювання – воно вчить мислити як дослідник: *спостереження* → *гіпотеза* → *перевірка* → *узагальнення*. Освітніх ефектів вищезазначеного, на думку авторів, можна досягти не власне технологією, а *структурою уроку*: ролі в групі, протоколи спостереження / вимірювання, рубрики оцінювання, обґрунтування до пояснень та перенесення отриманого результату в новий контекст.

Інтеграція цифрових середовищ у навчання математики – це не просто технічна інновація, а зміна способу мислення про математичні об'єкти. GeoGebra, Desmos Geometry і Python стають не лише «додатками для візуалізації», а платформами для моделювання, дослідження і перевірки закономірностей, що спонукає учнів перейти від пасивного спостереження до активного створення знань. Можливості інтеграції цих середовищ у курс математики для 7–11 класів представлено в таблиці 1.

Таблиця 1

Можливості інтеграції середовищ GeoGebra, Desmos Geometry і Python у шкільному курсі математики (7–11 класи)

Розділ / тема	Роль GeoGebra	Роль Desmos Geometry / Desmos Graphing	Роль Python (turtle, matplotlib)	Педагогічна цінність і результат для учнів
Геометрія (7–9 кл.) Трикутники, кола, подібність, симетрія	Побудова, вимірювання, перетворення фігур; спостереження інваріантів (кути, сторони, відношення)	Швидко відтворення базових побудов; відображення, симетрія, трансформація	Відтворення побудов у коді; обчислення радіусів, площ, периметрів; перевірка формул (формула Герона, радіуси вписаних / описаних кіл)	Розвиток просторової уяви, розуміння залежностей, формування навичок перевірки й пояснення закономірностей

Алгебра і функції (7–10 кл.) Лінійна, квадратна, степенева, показникова функції	Динамічна побудова графіків; зміна параметрів a, b, c ; спостереження впливу на вигляд кривої	Параметричні дослідження; швидке накладання кількох графіків для порівняння	Побудова графіків через <i>matplotlib</i> ; порівняння функцій, табличний аналіз	Розвиток параметричного мислення, аналітичних навичок і розуміння перетворень функцій
Аналітична геометрія (10–11 кл.) Прямі, кола, параболи, еліпси	Візуалізація рівнянь і точок перетину; побудова координатних сіток	Дослідження впливу коефіцієнтів на форму ліній	Обчислення координат точок перетину, відстаней, кутів, площ; симуляції	Зв'язок між алгебраїчною і геометричною моделями; формування аналітичної інтуїції
Планіметрія та перетворення фігур Паралельні перенесення, обертання, віддзеркалення	Побудова фігур і їхніх образів при перетвореннях	Візуалізація рухів, симетрій, координатних змін	Кодове відтворення обертань (через <i>turtle</i>); порівняння вихідних і кінцевих координат	Усвідомлення сутності геометричних перетворень, розвиток логіки просторових змін
Статистика і теорія ймовірностей (10–11 кл.)	Побудова діаграм, гістограм, трендових ліній	Візуалізація залежностей і тенденцій	Моделювання випадкових подій, генерація вибірок, побудова гістограм і графіків розподілу	Розуміння випадковості, варіативності, формування статистичної грамотності
Комбінаторика, послідовності, ряди	Демонстрація закономірностей у розміщеннях, симетриях	Побудова послідовностей, фрактальних структур	Створення алгоритмів для обчислення кількості варіантів, побудова фракталів (трикутник Серпінського тощо)	Розвиток алгоритмічного мислення, умінь описувати закономірності мовою алгоритмів і коду
Прикладна математика, STEM-проекти	Побудова моделей руху, фізичних траєкторій, хвиль	Інтерактивна візуалізація формул і явищ	Симуляції руху тіл, зміни швидкостей, траєкторій, створення графічних моделей процесів	Формування дослідницької культури, бачення міжпредметних зв'язків (фізика, інформатика, технології)

Джерело: авторський варіант

Зазначимо, що інтеграція середовищ GeoGebra, Desmos і Python має бути поступовою й цілеспрямованою. Учні не повинні сприймати ці інструменти як щось додаткове або «технічне», – вони мають відчутти, що це продовження математичної думки в цифровому просторі.

Автори пропонують таку послідовність упровадження:

1. *Візуалізація* (GeoGebra / Desmos) (передбачає спостереження за закономірностями).
2. *Аналіз і вимірювання* (відбувається зміна параметрів та фіксація результатів).

3. *Програмна верифікація* (Python) (забезпечує перевірку закономірностей чисельно).

4. *Узагальнення* (під час якого висновок формулюється математичною мовою).

Такий ланцюг дій дає здобувачам освіти повний досвід наукового дослідження в межах шкільного уроку. Пропонуємо розглянути приклади інтеграції цифрових інструментів на уроках математики (див. таблицю 2). Разом вони створюють повний цикл математичного пізнання: *від спостереження → до дії → до перевірки → до узагальнення*.

Таблиця 2

Приклади інтеграції цифрових інструментів на уроках математики

Етап уроку / діяльність учня	Інструмент	Ціль і педагогічний акцент	Очікуваний результат
Візуалізація явища або закономірності	GeoGebra / Desmos	Створення моделі, спостереження змін залежно від параметрів	Формування інтуїтивного розуміння, визначення гіпотези
Перевірка гіпотези	Python (бібліотека <i>matplotlib, turtle</i>)	Проведення обчислювальних експериментів, моделювання	Підтвердження чи спростування закономірності
Аналіз і узагальнення	GeoGebra + Python	Порівняння результатів візуально й чисельно	Усвідомлення взаємозв'язку між формою і формулою
Рефлексія й обговорення	Будь-яке середовище	Пояснення отриманих результатів, формулювання висновків	Розвиток математичної мови, критичного мислення
Розширення дослідження	Python + GeoGebra	Варіювання параметрів, створення власних моделей	Формування навичок самостійного дослідження й творчості

Джерело: авторський варіант

Інтеграція GeoGebra, Desmos і Python у курс математики 7–11 класів створює нову педагогічну екосистему, де візуальне, аналітичне й алгоритмічне мислення поєднуються в єдиний процес. Вона робить навчання природно дослідницьким, сприяє

розвиткові гнучкого мислення, здатності бачити закономірності й пояснювати їх, а також підвищує мотивацію через залучення учнів до реальної дії, а не спостереження. Моделювання є не просто методом, а основним способом мислення, через який

учень будує знання, перевіряє себе і відкриває математичні структури в цифровому світі.

У розвідці запропоновано фрагменти авторських уроків, що поєднують діяльність, спостереження, узагальнення і вибудовані за єдиною логікою: *візуалізація* → *аналіз* → *перевірка* → *висновок* (див. таблиця 3). Фрагменти розглянуто як само-

достатні дидактичні проєкти (не як результати емпіричної перевірки), проте їх можна інтегрувати в окремий мініпроєкт. Водночас GeoGebra і Desmos формують просторову інтуїцію, Python – аналітичних умінь і алгоритмічних навичок. Головна дидактична цінність полягає в тому, що учень відкриває закономірність самостійно, а не відтворює пояснення вчителя.

Таблиця 3

Фрагменти уроків математики з використанням методу моделювання

Тема / розділ	Цифрові середовища	Суть моделювання (фрагмент)	Ключове відкриття / очікуваний результат учнів
Уписане і описане коло трикутника (Геометрія, 8 кл.)	GeoGebra, Python (<i>math</i>)	Побудова трикутника з рухомими вершинами, вимірювання сторін і радіусів, перевірка формул $S = pr$ та $R = abc/4S$ у Python	Учні досліджують залежність між сторонами, площею та радіусами кіл; самостійно отримують загальні формули
Перетворення графіка функції $y = a(x - b) \times 2 + c$ (Алгебра, 9 кл.)	Desmos Graphing, Python (<i>matplotlib</i>)	Маніпулювання параметрами a,b,c через повзунки в Desmos, побудова графіків у Python для різних параметрів	Учні виявляють, як кожен параметр впливає на форму та положення графіка; формулюють узагальнення про роль коефіцієнтів
Серединні перпендикуляри і центр описаного кола (Геометрія, 7 кл.)	GeoGebra	Побудова трикутника з трьома серединними перпендикулярами, маніпуляція вершинами, спостереження за точкою перетину	Учні самостійно висновують поняття центра описаного кола як точки, рівновіддаленої від вершин трикутника
Лінійна залежність між змінними (Алгебра, 7 кл.)	Desmos, Python (<i>numpy</i> , <i>matplotlib</i>)	Побудова точок (довжина – маса, час – відстань) у Desmos; побудова лінії тренду в Python, знаходження кута нахилу	Учні усвідомлюють суть лінійної залежності; спостерігають числове та графічне підтвердження

Закон великих чисел: стабілізація частоти події (Імовірність і статистика, 10–11 кл.)	Python (<i>random</i> , <i>matplotlib</i>), GeoGebra	Симуляція 1000 підкидань монети у Python, побудова гістограм частот; відображення результатів у GeoGebra як графіка наближення до 0,5	Учні роблять висновки про закономірність у випадкових процесах; досліджують ідею стабілізації відносної частоти
Перетворення фігур у координатній площині (Геометрія, 9 кл.)	GeoGebra, Python (<i>turtle</i>)	Побудова фігури та її відображення при повороті / дзеркальному відображенні; програмне відтворення через команди <i>rotate()</i> , <i>goto()</i>	Учні засвоюють сутність геометричних перетворень як руху фігури в просторі координат; пояснюють збереження інваріантів
Моделювання пропорцій у прямокутному трикутнику (Геометрія, 7–8 кл.)	GeoGebra	Зміна співвідношення сторін прямокутного трикутника, спостереження зміни площі при сталому периметрі	Учні відкривають, що площа не зберігається при зміні співвідношення сторін, навіть за сталого периметра
Моделювання гармонічних коливань (Функції, 10 кл.)	Desmos, Python (<i>numpy</i> , <i>matplotlib</i>)	Побудова функції $y = A \sin(\omega x + \phi)$; зміна параметрів амплітуди, частоти, фази	Учні досліджують вплив параметрів на графік коливань; розуміють фізичний зміст змінних
Фрактали у природі: трикутник Серпінського (STEM-проект, 10–11 кл.)	Python (<i>turtle</i>), GeoGebra	Програмування алгоритму побудови трикутника Серпінського; візуальне порівняння з геометричною моделлю в GeoGebra	Учні усвідомлюють принцип самоподібності, бачать, як складні структури будуються через прості повторення

Джерело: авторський варіант

Висновки. Візуальне та комп'ютерне моделювання є ефективною педагогічною технологією, що змінює характер навчання математики, сприяє поєднанню інтуїтивно-образного й аналітичного підходів, робить навчальний процес дослідницьким і практико орієнтованим.

Визначено педагогічну цінність описаного моделювання у формуванні й розвитку просторової уяви й обчислювальних

умінь учнів, зокрема: динамічні геометричні системи помітно підсилюють просторову візуалізацію; інтеграція програмування в математику сприяє підтримці узагальненню та перенесенню дій у практичну площину; що так само дає змогу досягати емпіричного ефекту; спостерігати позитивний вплив цифрових інструментів на якість навчання.

Узагальнено можливості інтеграції

середовищ GeoGebra, Desmos Geometry і Python (turtle, matplotlib) у різні теми шкільного курсу математики. Ці засоби утворюють взаємодоповнювальну систему інструментів, у якій кожен виконує власну роль: GeoGebra – сприяє розвитку просторової уяви, розуміння властивостей геометричних об'єктів через маніпуляцію; Desmos – забезпечує швидку візуалізацію функціональних залежностей і параметричних змін; Python – розвиває алгоритмічну культуру, обчислювальне мислення і вміння підтверджувати закономірності чисельно. Інтеграція зазначених середовищ утворює педагогічний трикутник «візуалізація – алгоритмізація – аналітика», у якому учень переходить від спостереження до перевірки, від експерименту до узагальнення, а від інтуїції – до логічного доведення.

Запропоновано приклади фрагментів авторських уроків, застосування яких у навчальному процесі дозволить побачити, як моделювання сприяє розвитку навичок учнів самостійно виявляти закономірності та формулювати висновки. Використання цифрового моделювання зумовлює формування міжпредметних зв'язків: математика

починає взаємодіяти з інформатикою, фізикою, технологіями та навіть мистецтвом. Учні бачать, що математичні моделі – універсальна мова опису світу, яка поєднує логіку і креативність. Найбільшого ефекту від моделювання можна досягати за умов діяльнісного підходу: коли здобувач не споглядає готову модель, а створює її самостійно, досліджує, змінює, перевіряє. У цьому випадку формується глибоке розуміння понять і вміння застосовувати знання в нових ситуаціях.

Саме такий інтегрований підхід до навчання математики відповідає вимогам Нової української школи, концепції STEM-освіти та підготовці школярів до життя у світі, де мислення, аналітика й уміння конструювати реальні процеси стають ключовими компетентностями XXI століття.

Перспективи досліджень пов'язані з емпіричною перевіркою впливу моделювання на розвиток просторової уяви й обчислювального мислення учнів та вивченням диференціації завдань для різних рівнів підготовки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гриб'юк О. О., Юнчик В. Л. Система Geogebra в процесі проектно-дослідницької діяльності на уроках математики / О. О. Гриб'юк, В. Л. Юнчик / Інститут цифровізації освіти НАПН України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/704864/1/Kirovograd_Hrybiuk_Yunchyk_tezu.pdf.
2. Єрмакова-Черченко Н. О. Використання електронного засобу Geogebra при розв'язуванні задач з фізики / Н. О. Єрмакова-Черченко // Information Technologies in Education. – 2022. – № 1(50). – С. 7–18. DOI: <https://doi.org/10.14308/ite000753>
3. Зуліна Д. Переваги використання програмного засобу GeoGebra на уроках стереометрії / Д. Зуліна // Актуальні проблеми математики, фізики і технологій : зб. наук. пр. / Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. – Вінниця : ТОВ «Меркьюрі-Поділля», 2020. – Вип. 17. – С. 138–141.
4. Овсієнко Ю. І. Використання математичних методів в економіці у поєднанні з програмним забезпеченням GeoGebra / Ю. І. Овсієнко, А. В. Антоненко, І. М. Канівець // Грааль науки. – 2025. – № 52. – С. 200–208. DOI: <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.23.05.2025.024>
5. Пейперт С. Переворот в сознании: Дети, компьютеры и плодотворные идеи / С. Пейперт. – М. : Педагогика, 1989. – 224 с.
6. Пікалова В. В. Geogebra як інструмент упровадження STEM орієнтованих досліджень у практику підготовки майбутнього вчителя математики / В. В. Пікалова // Науковий часопис Українського державного університету імені Михайла Драгоманова. –

2020. – Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. – № 22 (29). – С. 133–138. DOI: [https://doi.org/10.31392/NPU-nc.series2.2020.22\(29\).18](https://doi.org/10.31392/NPU-nc.series2.2020.22(29).18)

7. Погромська Г. С., Махровська Н. А. Синергія програмування та природничо-математичних дисциплін у контексті STEM-освіти / Г. С. Погромська, Н. А. Махровська // Вересень. – 2025. – Том 3. – № 106. – С. 46–59. DOI: <https://doi.org/10.54662/veresen.3.2025.04>.

8. Погромська Г. С. Програма компетентнісно та діяльнісно орієнтованого варіативного модуля «Цікава математика з Desmos», 2021. / Г. С. Погромська // [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://drive.google.com/file/d/1mo69Si3tiESEQmdgUcbRreYHmQMB0GWz/view>

9. Поліщук Т. Підготовка майбутніх учителів математики у процесі вивчення математичних дисциплін з використанням пакету Geogebra / Т. Поліщук, Г. Іщенко, Д. Возносименко // Проблеми підготовки сучасного вчителя. – 2020. – № 21. – С. 111–118. DOI: <https://doi.org/10.31499/2307-4914.21.2020.205462>

10. Тютюн Л. Дослідження інверсії та її властивостей за допомогою програми GeoGebra / Л. Тютюн // Актуальні проблеми математики, фізики і технологій : зб. наук. пр. / Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. – Вінниця : ТОВ «Меркьюрі-Поділля», 2020. – Вип. 17. – С. 106–112.

11. Шабанова Л. М. Використання web-сервісу «Geogebra» під час вивчення курсу геометрії 7 класу / Л. М. Шабанова // Наукові записки молодих учених. – 2022. – № 12. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/2075>

12. Fletcher G. H., Lu J. J. Education: Human Computing Skills: Rethinking the K12 Experience. Association for Computing Machinery. Communications of the ACM. – 2009. – № 52 (2).

13. Grover S., Pea R. Computational thinking in K-12: A review of the state of the field. Educational Researcher. – 2013. – № 42(1). – P. 38–43.

14. He A., Yuan W., Kiliçman, A. A meta-analysis on the effectiveness of Dynamic mathematics Software on K-12 students' mathematics learning. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. – 2024. – 56 (9). – С. 1832–1855. DOI: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2375257>

15. Nite W. A., Lawrence S. B., R., Chakravorty D. Teaching Python to Secondary Students: A Backward Design Process / American Society for Engineering Education, Paper presented at the 2025 ASEE Annual Conference & Exposition, Montréal, QC. ASEE, 2025. URL: <https://peer.asee.org/46734>

16. Wing J. M. Computational Thinking and thinking about computing, Philosophical Transactions of the Royal Society, 2008. – P. 366.

VISUAL AND COMPUTER-BASED MODELS IN INTEGRATED MATHEMATICS EDUCATION

Rohozhynska Elina,

*Methodist of the Department of Theory
and Methods for Teaching
the Natural Sciences, Mathematics
and Information Technologies*

*Mykolaiv In-Service Teachers Training Institute
4-a, Admiralska Street, 54001, Mykolaiv, Ukraine
elina.rohozhyńska@moippo.mk.ua*

Rymar Rostyslav,

Teacher of Computer Science,
Separate Structural Unit «Technological and
Economic Professional College of
Mykolaiv National Agrarian University»
9, Heorhii Gongadze Street, 54000, Mykolaiv, Ukraine
rymar@mnau.edu.ua

The article substantiates the pedagogical value of visual and computer-based modelling in secondary mathematics (Grades 7–11) and proposes an integration framework that combines GeoGebra, Desmos, and Python (turtle, matplotlib) to cultivate spatial and computational thinking. Conceptual-methodological reasoning and the authors' synthesis indicate that dynamic geometry systems (DGS) enable students to reason with invariants, parameters, and transformations through direct manipulation, while Python translates visual insight into programmatic verification via a series of experiments, automated constructions, and data-driven checks. We formulate a didactic workflow-visualisation → analysis → programmatic verification → generalization – and show how it can be enacted within a two-period lesson through small-group roles (constructor, analyst, programmer, presenter) that support agency, collaboration, and reflective discourse.

The paper presents two summary tables that map integration opportunities across major curriculum strands (geometry, functions, analytic geometry, transformations, statistics/probability, combinatorics, and STEM projects) and align tools to their pedagogical affordances. A companion table offers lesson fragments in which learners independently discover patterns (e.g., relations among triangle elements, parameter effects on a quadratic, linear dependence, law of large numbers, rigid motions, and fractals) and articulate conclusions grounded in both dynamic visuals and code outputs. Practical guidance is provided on low-barrier task design (short, readable code; prepared sliders and templates), process-oriented assessment (quality of hypotheses, parameter variation, algorithmic correctness, interpretation of error, teamwork), and differentiation (“common core + extensions” for mixed-ability classes).

We also outline organisational conditions and risk-mitigation strategies (offline GeoGebra, portable Python, cached applets, print-ready snapshots) to ensure continuity in constrained settings. The contribution is methodological rather than empirical; nonetheless, it delineates mechanisms by which modelling can impact learning: visual variability fosters spatial intuition; algorithmic iteration stabilises conjectures; and immediate feedback sustains motivation by shifting learners from observers to creators. The article concludes with prospects for future work – quasi-experimental evaluation of impacts on spatial/computational thinking, tighter Python–DGS bridges, and refined task taxonomies – positioning integrated modelling as a coherent pathway from intuition to formal mathematical explanation in contemporary classrooms.

The perspectives for further research are related to the empirical evaluation of the impact of modelling on students' spatial and computational thinking, as well as the exploration of task differentiation for different levels of learner preparedness.

Keywords: computational thinking; dynamic geometry systems; Desmos; GeoGebra; integration; modelling; Python.

REFERENCES

1. Fletcher, G. H., & Lu, J. J. (2009). Education: Human computing skills: Rethinking the K-12 experience. *Communications of the ACM*, 52(2), 23–25. Association for Computing

Machinery (eng).

2. Grover S., Pea R. (2013). Computational thinking in K-12: A review of the state of the field. *Educational Researcher*. – № 42(1). – P. 38–43 (eng).

3. He, A., Yuan, W., & Kiliçman, A. (2024). A meta-analysis on the effectiveness of dynamic mathematics software on K-12 students' mathematics learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 56 (9), 1832–1855. DOI: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2375257> (eng).

4. Hrybiuk, O. O., & Yunchyk, V. L. (2019). Systema Geogebra v protsesi proektno-doslidnytskoi diialnosti na urokakh matematyky [GeoGebra system in project-research activity in math lessons]. Instytut tsyvrovizatsii osvity NAPN Ukrainy. Retrieved from https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/704864/1/Kirovograd_Hrybiuk_Yunchyk_tezu.pdf (ukr).

5. Nite, W. A., Lawrence, S. B., & Chakravorty, D. (2025). Teaching Python to secondary students: A backward design process. Paper presented at the 2025 ASEE Annual Conference & Exposition, Montréal, QC. ASEE. Retrieved from: <https://peer.asee.org/46734> (eng).

6. Ovsiienko, Yu. I., Antonets, A. V., & Kanivets, I. M. (2025). Vykorystannia matematychnykh metodiv v ekonomitsi u poiednanni z prohramnym zabezpechenniam GeoGebra [Use of mathematical methods in economics in combination with GeoGebra software]. *Graal nauky*, 52, 200–208. DOI: <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.23.05.2025.024> (ukr).

7. Pejpert, S. (1989). Perevorot v soznanii: Deti, komp'yutery i plodotvornye idei [A revolution in consciousness: children, computers, and fruitful ideas]. M.: Pedagogika (rus).

8. Pikalova, V. V. (2020). Geogebra yak instrument uprovalzhennia STEM oriietovanykh doslidzhen u praktyku pidhotovky maibutnoho vchytelia matematyky [GeoGebra as a tool for implementing STEM-oriented research in teacher training]. *Naukovyi chasopys Ukrainskoho derzhavnoho universytetu imeni Mykhaila Drahomanova. Serii 2. Kompiuterno-oriietovani systemy navchannia*, 22 (29), 133–138. DOI: [https://doi.org/10.31392/NPU-nc.series2.2020.22\(29\).18](https://doi.org/10.31392/NPU-nc.series2.2020.22(29).18) (ukr).

9. Pohromska, H. S., & Makhrovska, N. A. (2025). Synerhiia prohramuvannia ta pryrodnycho-matematychnykh dystsyplin u konteksti STEM-osvity [Synergy of programming and natural-mathematical subjects in the context of STEM education]. *Veresen*, 3(106), 46–59. DOI: <https://doi.org/10.54662/veresen.3.2025.04> (ukr).

10. Pohromska, H. S. (2021). Prohrama kompetentnisno ta diialnisno oriietovanoho variativnoho modulua «Tsikava matematyka z Desmos» [Program of the competence- and activity-oriented module «Interesting Mathematics with Desmos»]. Retrieved from <https://drive.google.com/file/d/1mo69Si3tiESEQmdgUcbRreYHmQMB0GWz/view> (ukr).

11. Polishchuk, T., Ishchenko, H., & Voznosymenko, D. (2020). Pidhotovka maibutnykh uchyteliv matematyky u protsesi vyvchennia matematychnykh dystsyplin z vykorystanniam paketu Geogebra [Training of future math teachers using GeoGebra]. *Problemy pidhotovky suchasnoho vchytelia*, 21, 111–118. DOI: <https://doi.org/10.31499/2307-4914.21.2020.205462> (ukr).

12. Shabanova, L. M. (2022). Vykorystannia web-servisu «Geogebra» pid chas vyvchennia kursu heometrii 7 klasu [Using the GeoGebra web service in studying 7th-grade geometry]. *Naukovi zapysky molodykh uchenykh*, 12. Retrieved from <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/2075> (ukr).

13. Tiutun, L. (2020). Doslidzhennia inversii ta yii vlastyvostei za dopomohoiu prohramy GeoGebra [Research of inversion and its properties using GeoGebra software]. *Aktualni problemy matematyky, fizyky i tekhnolohii*, 17, 106–112. Vinnytsia: TOV «Merkuri-Podillia» (ukr).

14. Wing J. M. (2008). Computational Thinking and thinking about computing, *Philosophical Transactions of the Royal Society*. – P. 366 (eng).

15. Yermakova-Cherchenko, N. O. (2022). Vykorystannia elektronnoho zasobu Geogebra pry rozviazuvanni zadach z fizyky [Using GeoGebra software in solving physics problems]. *Information Technologies in Education*, 1(50), 7–18. DOI: <https://doi.org/10.14308/ite000753> (ukr).
16. Zulina, D. (2020). Perevahy vykorystannia prohramnoho zasobu GeoGebra na urokakh stereometrii [Advantages of using GeoGebra software in stereometry lessons]. *Aktualni problemy matematyky, fizyky i tekhnolohii*, 17, 138–141. Vinnytsia: TOV «Merkuri-Podillia» (ukr).

Стаття надійшла до редакції: 18.11.2025

Прийнято до друку: 24.12.2025